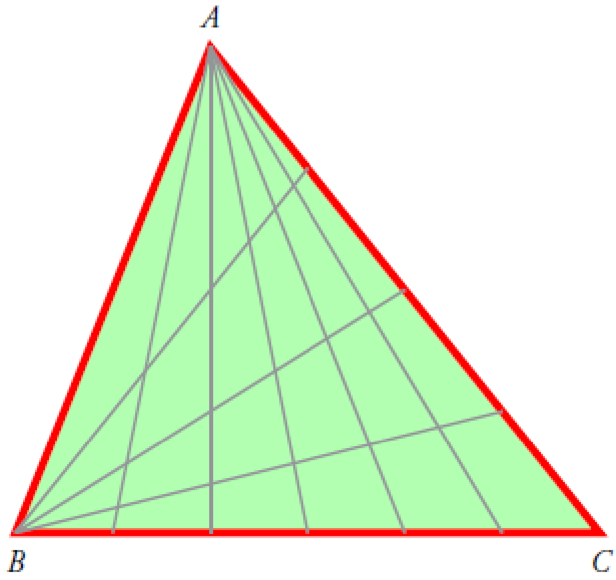
Translation of Counting Triangles : Sundarraman Madhusudanan_From Azim premji University At Right Angles_November, 2016

त्रिभुजों की गिनती

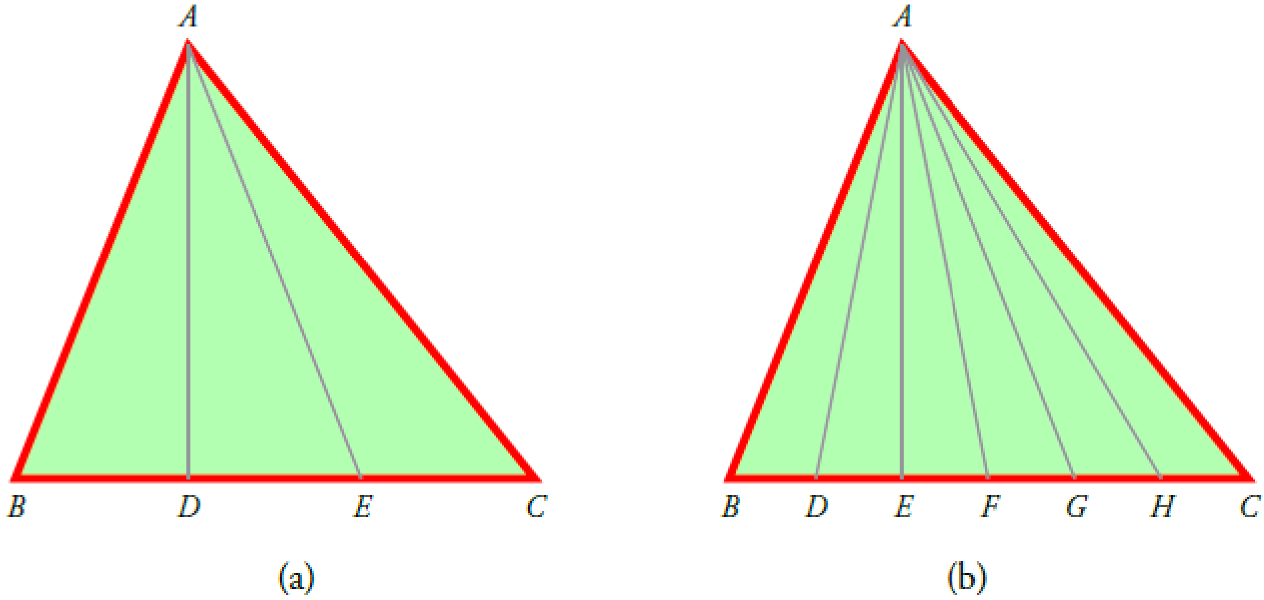
सुन्दररमन मधुसूदनन

मुख्य शब्द : *त्रिभुज, गिनती, संयोजन*

इस आलेख में मैंने त्रिभुज के किसी एक शीर्ष से विपरीत भुजा पर खींचे गए n खण्डों और किसी दूसरे शीर्ष से विपरीत भुजा पर खींचे गए h खण्डों से बनने वाले त्रिभुजों की गिनती के सवाल का अध्ययन किया है। इस तरह के सवाल हमें पहेली संग्रहों में अक्सर देखने को मिलते हैं। उदाहरण के लिए : 'चित्र-1 में दिखाई देने वाले त्रिभुजों की संख्या गिनें।' इस तरह के किसी सवाल के लिए एक-एक करके त्रिभुजों को गिनना कठिन होता है। साथ ही इस तरह से गिनने में त्रुटि की सम्भावना भी अधिक होती है। हमें इससे अधिक विश्लेषणात्मक और व्यवस्थित प्रक्रिया की आवश्यकता है।



चित्र-1



चित्र-2

चरण 0 : केवल एक शीर्ष से खींचे गए खण्ड

हम पहले उस उप-सवाल को हल करते हैं जिसमें खण्ड केवल एक शीर्ष से खींचे जाते हैं। **चित्र-2(a)** में रेखाएँ *AD*, *AE* शीर्ष *A* से *BC* पर *D*, *E* बिन्दुओं पर खींची गई हैं। इनसे बनने वाले त्रिभुजों को हम एक-एक करके गिन सकते हैं। यहाँ इनकी संख्या है 6। अब शीर्ष *A* से *BC* पर *n* बिन्दुओं पर *n* खण्ड खींचें, जैसे कि **चित्र 2(b)** में दिखाया गया है, यहाँ *n* = 5। अगर हम *n* + 2 खण्डों के समुच्चय से कोई भी 2 खण्ड लेते हैं जो कि शीर्ष *A* से निकलते हैं (यानी कि *AB* और *AC* के साथ *n* खण्ड), तो हमें ठीक एक त्रिभुज मिलता है (जिसका आधार *BC* पर है)। तो, त्रिभुजों की संख्या *n* + 2 खण्डों में से 2 खण्डों को चुनने के विभिन्न तरीक़ों की संख्या के बराबर होगी, जो कि

$$\binom{n+2}{2}$$

है। इसीलिए, एक शीर्ष से खींचे गए *n* खण्डों के लिए त्रिभुजों की संख्या है $(n + 2)(n + 1)/2$।

चरण 1 : मूल सवाल पर वापस

अब मैं मूल सवाल पर वापस आता हूँ। यह सवाल इस बात पर निर्भर करता है कि दो शीर्षों से निकलने वाले खण्डों की संख्या बराबर है या नहीं। मैंने इस सवाल को दो स्थितियों में बाँट दिया है।

केस 1 : जब दो शीर्षों से खींचे गए खण्डों की संख्या समान हो, $n = h$ । उदाहरण के लिए त्रिभुज $\triangle ABC$ (**चित्र-3**) पर विचार करें, जिसमें शीर्ष B और C *दोनों* से विपरीत भुजाओं पर 2 खण्ड खींचे गए हैं। हम पहले उन त्रिभुजों की गिनती करेंगे जिनका शीर्ष B है। त्रिभुज CBE में ऐसे

$$\binom{4}{2} = 6$$

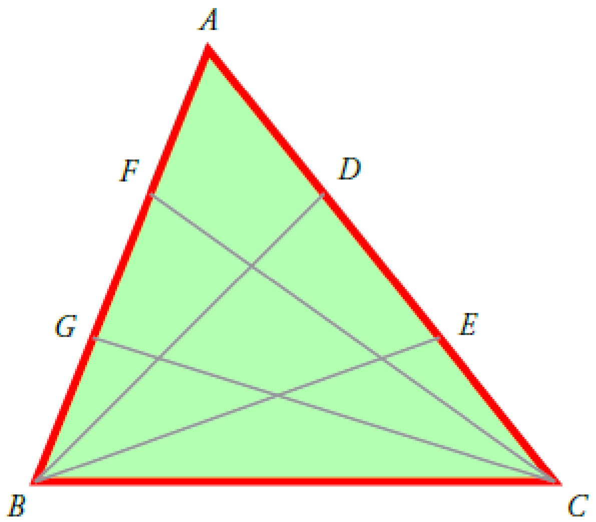
त्रिभुज हैं। इसी तरह से त्रिभुज CBD और CBA में भी 6 त्रिभुज हैं। इसीलिए 6 + 6 + 6 = 18 त्रिभुज ऐसे हैं, जिनका शीर्ष B है। इस को हम ऐसे भी लिख सकते हैं :

$$\binom{4}{2} \times \binom{3}{1} = 6 \times 3 = 18.$$

जिन त्रिभुजों का कोई भी शीर्ष B नहीं है वे सब $\triangle ACG$ के अन्दर होंगे और उन सभी का शीर्ष C होगा। इनकी गिनती के लिए, ध्यान दें कि यह सभी CA, CF, CG खण्डों में से दो खण्ड और BA, BD, BE में से एक खण्ड का चयन कर बन सकते हैं। तो हमें मिलता है :

$$\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$$

त्रिभुज।



चित्र-3

तो, कुल त्रिभुजों की संख्या है 18 + 9 = 27।

हो सकता है कि आप में से कुछ ने यह ध्यान दिया हो कि $27 = 3^3$, जिसे हम $(2+1)^3$ के रूप में भी लिख सकते हैं और शायद यह अनुमान भी लगाया हो कि यह पूरी तरह से एक संयोग नहीं है।

अब हम यह सिद्ध करने की कोशिश करेंगे कि यदि दोनों शीर्षों से n खण्ड खींचे जाते हैं, तब $(n+1)^3$ त्रिभुज बनेंगे।

इस सामान्य दावे का प्रमाण ऊपर सुझाए गए तरीक़े के समान है। इस तरीक़े से हम

$$\binom{4}{2} \times \binom{3}{1}$$

की जगह इस पद को लिखते हैं :

$$\binom{n+2}{2} \times \binom{n+1}{1};$$

और

$\binom{3}{2} \times \binom{3}{1}$ के स्थान पर हम यह पद लिखते हैं

$$\binom{n+1}{2} \times \binom{n+1}{1}.$$

अत: इस विन्यास में कुल त्रिभुजों की संख्या होगी :

$$\begin{aligned}\binom{n+2}{2} \times \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \times \binom{n+1}{1} &= \frac{(n+2)(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)^2 n}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2}(2n+2) \\ &= (n+1)^3.\end{aligned}$$

केस स्थिति 2 : जब दो शीर्षों से खींचे गए खण्डों की संख्या असमान हो, यानी कि $n \neq h$

अब हम **चित्र-4** की स्थिति पर विचार करते हैं जब शीर्ष B से भुजा AC पर n खण्ड और शीर्ष C से भुजा AB पर h खण्ड खींचे जाते हैं। यहाँ पर यह माना गया है कि $n \neq h$।

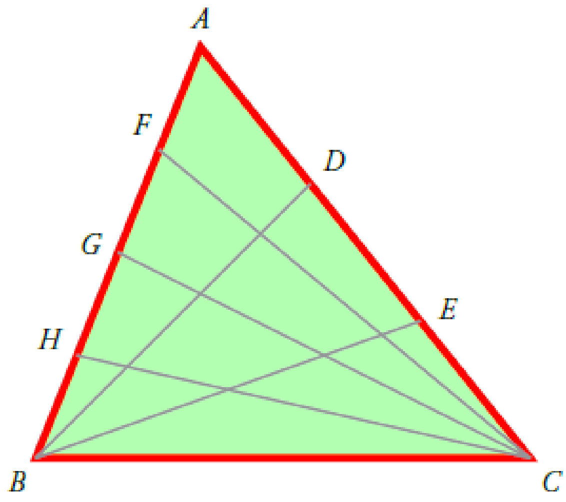
हमारे लिए यह बहुत आसान है क्योंकि इस विन्यास का विश्लेषण पिछले भाग के समान है।

इसीलिए, पद

$$\binom{n+2}{2} \times (n+1)$$

की जगह हम यह पद लिखते हैं :

$$\binom{n+2}{2} \times \binom{h+1}{1};$$



चित्र-4

और पद

$$\binom{n+1}{2} \times \binom{n+1}{1}$$

की जगह हम यह पद लिखते हैं :

$$\binom{h+1}{2} \times \binom{n+1}{1}.$$

अत: विन्यास में त्रिभुजों की कुल संख्या है :

$$\binom{n+2}{2} \times \binom{h+1}{1} + \binom{h+1}{2} \times \binom{n+1}{1}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)(h+1)}{2} + \frac{(h+1)h(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(h+1)}{2}(n+h+2)$$

$$= \frac{(n+1)(h+1)(n+h+2)}{2}.$$

टिप्पणियाँ

- यदि हम n और h के मानों को आपस में बदल दें तो इस सूत्र का उपयोग करने पर हमें समान उत्तर मिलेंगे। यह तार्किक लगता है, क्योंकि दोनों विन्यास एक-दूसरे के दर्पण प्रतिबिम्ब (mirror image) हैं।

- यदि हम $n = h$ रखें, तो हमें पिछली बार निकाला हुआ सूत्र, यानी कि $(n + 1)^3$, मिल जाएगा।

खुला प्रश्न

क्या आप त्रिभुजों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं जब तीन शीर्षों से क्रमश: n, h, k खण्ड उनकी विपरीत भुजाओं पर खींचे जाते हैं? आसानी के लिए हम यह मान सकते हैं कि इन तीनों $n + h + k$ रेखाखण्डों में से कोई भी एक ही बिन्दु पर नहीं मिलते हैं।

सुन्दररमन मधुसूदनन डोम्बिविली, ज़िला ठाणे, महाराष्ट्र के महिला समिति स्कूल और जूनियर कॉलेज में ग्यारहवीं कक्षा के विद्यार्थी हैं। बचपन से ही उन्हें गणित में ख़ासी दिलचस्पी रही है। रेज़िंग अ मैथमैटिशियन फ़ाउण्डेशन द्वारा संचालित प्रशिक्षण कार्यक्रमों (जहाँ उन्हें हाई स्कूल स्तर पर गणित की पड़ताल करने के मौक़े मिले) के कारण उनकी गणित में रुचि बढ़ी। उन्हें बीजगणित, असतत गणित और सिद्धिकरण पसन्द हैं। सुन्दररमन गणित में शोध करना चाहते हैं।

अनुवाद : उत्सव पटेल
पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही